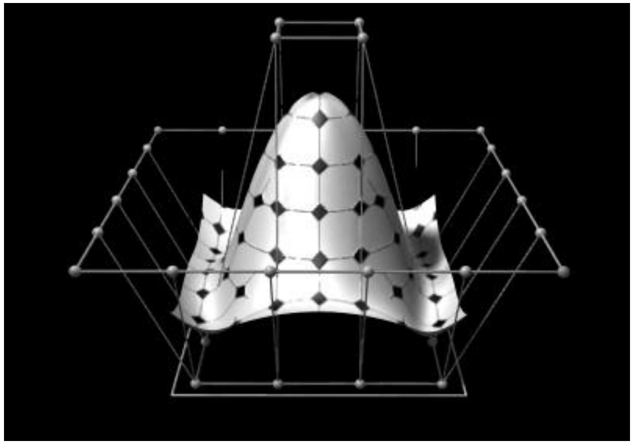
LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Computing Mathematics and Cybernetics faculty
Software department



CS255. **Computer Graphics** Introduction Course

Моделирование кривых и поверхностей. Сплайны

Турлапов, Вадим Евгеньевич
проф. каф. МО ЭВМ, ВМК, ННГУ

Parametrical curves. Interpolation polynomials

P (t) = (x (t), y (t)) – a point of a parametrical curve
v (t) **=**dP (t)/dt **–** speed vector
$L(t_0,u)=P(t_0) + u\mathbf{v}(t_0)$ - the equation of a tangent

$\mathbf{n}(t_0)=\mathbf{v}_\perp(t_0)=(-dy(t_0)/dt, dx(t_0)/dt$ **–** a normal(perpendicular) to a curve

Interpolation polynomials. Initial data: Knots, tangents, power. Boundary conditions. (The Public's Library and Digital Archive IBIBLIO. An Interactive Introduction to Splines http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm)

Interpolation on a single interval. Hermite splines

Unit interval (0,1)

On the unit interval (0,1), given a starting point $\boldsymbol{p}_0$ at t = 0 and an ending point $\boldsymbol{p}_1$ at t = 1 with starting tangent $\boldsymbol{m}_0$ at t = 0 and ending tangent $\boldsymbol{m}_1$ at t = 1, the polynomial can be defined by

$$p(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)p_0 + (t^3 - 2t^2 + t)m_0 + (-2t^3 + 3t^2)p_1 + (t^3 - t^2)m_1$$

where $t \in [0, 1]$. It is the Hermite spline.

Interpolation on (x_k, x_{k+1})

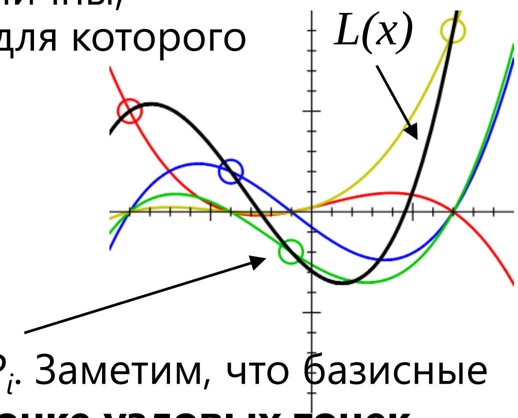
Interpolating x in the interval (x_k, x_{k+1}) can now be done with the formula

$$p(x) = h_{00}(t)p_k + h_{10}(t)(x_{k+1} - x_k)m_k + (-2t^3 + 3t^2)p_{k+1} + h_{10}(t)(x_{k+1} - x_k)m_{k+1}$$

with $t = (x - x_k) / (x_{k+1} - x_k)$. Note that the tangent values have been scaled by $x_{k+1} - x_k$ compared to the equation on the unit interval.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа (Lagrange) — многочлен минимальной степени, принимающий заданные значения на заданном наборе точек. Для $n+1$ пар чисел $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, где все x_j различны, существует единственный многочлен $L(x)$ степени не более n, для которого $L(x_j) = y_j$.



$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Вместо значений функции y_i могут быть взяты узловые точки P_i. Заметим, что базисные полиномы Лагранжа $l_i(x)$ **не принадлежат выпуклой оболочке узловых точек**. **Возможны осцилляции между узлами.**

Аналогично алгоритму Кастельжо (de Casteljau), для сплайнов Безье, для интерполяции Лагранжа существует алгоритм Айкена (**Aitken) их** итерационного вычисления:

$$\boldsymbol{P}_i^j = \boldsymbol{P}_i^{j-1}\,(t_{i+j} - t)\,/\,(t_{i+j} - t_i) + \boldsymbol{P}_{i+1}^{j-1}\,(t - t_i)\,/\,(t_{i+j} - t_i)\,, \qquad j = 1, n \qquad i = 0, n - j\,.$$

http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/lagrange.html

Вычисление базисных полиномов P(t) виде псевдокода:

```
for (i = 0; i < N; i++) {
P = 1;
for (j = 0; j < N; j++)
if (j != i) P = P*(t-ti[j])/(ti[i] - ti[j]); }
```

Homogeneous coordinates

Homogeneous coordinates of point P (x, y):

(x, y) ➔ (xh, yh, h) after normalization to h (Homogeneity)➔ (x, y, 1)

Homogeneous coordinates of a vector v (x, y) = P2-P1:

(x, y) ➔ (x, y, 0) - the vector is equal to infinity point (improper point)

Linear combinations of homogeneous coordinates. An affine combination

1. **v**+**v** ~ **v**, a**v**+b**v** ~ **v**
2. P+**v** ~ P
3. P1+P2 not P (while not normalized by 2)
4. P1+t·(P2-P1)=P1+t·**v**=t·P2+(1-t)·P1 ~ P - linear interpolation
5. **P=a·P1+b·P2+c·P3 & a+b+c=1, P – affine combination of points**

The middle of a triangle as an affine combination of points:

C = (A+B+D)/3 - a point of crossing of medians of a triangle

The twin-transformation of figures with identical quantity of points (movement, morphing):

P (t) =tween (A, B, t).

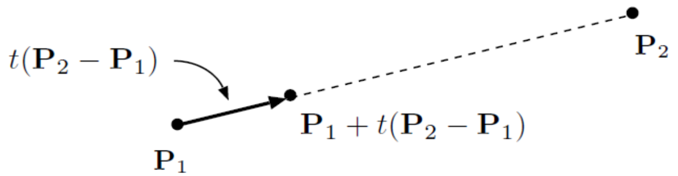
Affine combination of Points

Affine Combinations of Two Points

Let $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$ be points, and consider the expression

$$\mathbf{P} \;=\; \mathbf{P}_1 + t(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$$

This equation is meaningful, as $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ is a vector, and thus so is $t(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$. Therefore $\mathbf{P}$ is the sum of a point and a vector which is again a point. For each t, the point $\mathbf{P}$ represents a point on the line that passes through $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$.



We note that if $0 \le t \le 1$ then $\mathbf{P}$ is somewhere on the line segment joining $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$. If $t > 1$ then the point $\mathbf{P}$ is still on the line, but to the right of $\mathbf{P}_2$ in our illustration. Similarly if $t < 0$, then $\mathbf{P}$ is to the left of $\mathbf{P}_1$.

We can now define an **affine combination** of two points $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$ to be

$$\mathbf{P} \;=\; \alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2$$

Affine combination of Points & Convex Combinations

Convex Combinations

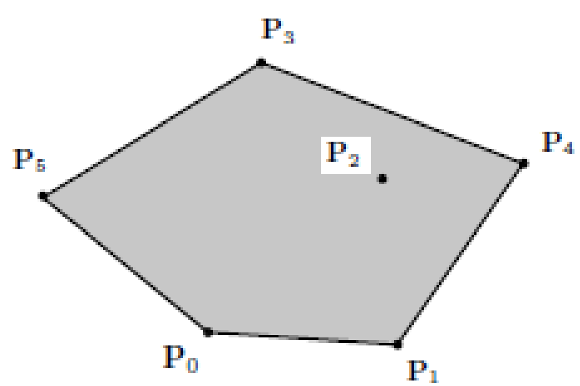
Given a set of points $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_n$, we can form affine combinations of these points by selecting $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$, with $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ and form new points

$$\mathbf{P} = \alpha_0 \mathbf{P}_0 + \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{P}_n$$

If each α_i is such that $0 \leq \alpha_i \leq 1$, then each generated point $\mathbf{P}$ is called a *convex combination* of the points $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_n$.

Convex Hull

The set of all points $\mathbf{P}$ that can be written as convex combinations of $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_n$ is called the <u>convex hull</u> of the points $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_n$. This convex hull is the smallest convex set that contains the set of points $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_n$. The following figure illustrates the convex hull of a set of six points:



Barycentric coordinates

Barycentric Coordinates

Given a set of points $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, ..., $\mathbf{P}_n$, we can write any point $\mathbf{P}$ as an affine combination of these $n+1$ points as

$$\mathbf{P} = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{P}_n$$

where $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$

In this form, the values $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ are called the *barycentric coordinates* of $\mathbf{P}$ relative to the points $\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_n\}$

Interpolation curves. Ferguson's parametric cubic Curves.

Ferguson's Parametric Cubic Curves

Given the two control points $\mathbf{P}_0$ and $\mathbf{P}_1$, and the slopes of the tangents $\mathbf{P}'_0$ and $\mathbf{P}'_1$ at each point, we can define a parametric cubic curve that passes through $\mathbf{P}_0$ and $\mathbf{P}_1$, with the respective slopes $\mathbf{P}'_0$ and $\mathbf{P}'_1$ by equating the coefficients of the polynomial function

$$\mathbf{P}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

with the values above. Namely

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(0) &= a_0 \\
\mathbf{P}(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\
\mathbf{P}'(0) &= a_1 \\
\mathbf{P}'(1) &= a_1 + 2a_2 + 3a_3
\end{aligned}$$

Interpolation curves. Ferguson's parametric cubic Curves.

Solving these equations simultaneously for a_0, a_1, a_2 and a_3, we obtain

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \mathbf{P}(0) \\
a_1 &= \mathbf{P}'(0) \\
a_2 &= 3\,[\mathbf{P}(1) - \mathbf{P}(0)] - 2\mathbf{P}'(0) - \mathbf{P}'(1) \\
a_3 &= 2\,[\mathbf{P}(0) - \mathbf{P}(1)] + \mathbf{P}'(0) + \mathbf{P}'(1)
\end{aligned}
$$

Substituting these into the original polynomial equation and simplifying to isolate the terms with $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{P}'(0)$, and $\mathbf{P}'(1)$, we have

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) = \; & (1 - 3t^2 + 2t^3)\mathbf{P}(0) \\
& +(3t^2 - 2t^3)\mathbf{P}(1) \\
& +(t - 2t^2 + t^3)\mathbf{P}'(0) \\
& +(-t^2 + t^3)\mathbf{P}'(1)
\end{aligned}
$$

Lets compare this with interpolational Hermit polynomial

$p(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)p_0 + (t^3 - 2t^2 + t)m_0 + (-2t^3 + 3t^2)p_1 + (t^3 - t^2)m_1$, where $t \in [0,1]$

Interpolation Hermite splines
(Charles Hermite; 24 Dec 1822 – 14 Jan 1901)

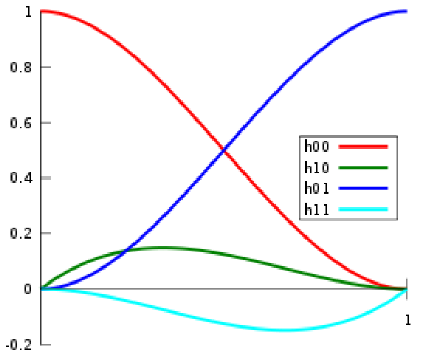
Representations

We can write the interpolation polynomial as

$$\boldsymbol{p}(t) = h_{00}(t)\boldsymbol{p}_0 + h_{10}(t)\boldsymbol{m}_0 + h_{01}(t)\boldsymbol{p}_1 + h_{11}(t)\boldsymbol{m}_1$$

where $h_{00}, h_{10}, h_{01}, h_{11}$ are Hermite basis functions. These can be written in different ways, each way revealing different properties.

	expanded	factorized	Bernstein
$h_{00}(t)$	$2t^3 - 3t^2 + 1$	$(1 + 2t)(1 - t)^2$	$B_0(t) + B_1(t)$
$h_{10}(t)$	$t^3 - 2t^2 + t$	$t(1 - t)^2$	$1/3*B_1(t)$
$h_{01}(t)$	$-2t^3 + 3t^2$	$t^2(3 - 2t)$	$B_3(t) + B_2(t)$
$h_{11}(t)$	$t^3 - t^2$	$t^2(t - 1)$	$-1/3*B_2(t)$



The "expanded" column shows the representation used in the definition above. The "factorized" column shows immediately, that h_{10} and h_{11} are zero at the boundaries. You can further conclude that h_{01} and h_{11} have a zero of multiplicity 2 at 0 and h_{00} and h_{10} have such a zero at 1, thus they have slope 0 at those boundaries. The "Bernstein" column shows the decomposition of the Hermite basis functions into Bernstein polynomials of order 3 ($B_k(t) = \binom{3}{k} \cdot t^k \cdot (1-t)^{3-k}$).

Using this connection you can express cubic Hermite interpolation in terms of cubic Bézier curves with respect to the four values $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_0 + \frac{\boldsymbol{m}_0}{3}, \boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{m}_1}{3}, \boldsymbol{p}_1$ and do Hermite interpolation using the de Casteljau algorithm. It shows that in a cubic Bézier patch the two control points in the middle determine the tangents of the interpolation curve at the respective outer points.

The choice of tangents. Finite difference. Cardinal & Catmull–Rom spline

The choice of tangents is non-unique, and there are several options available.

Finite difference

The simplest choice is the three-point difference, not requiring constant interval lengths,

$$\boldsymbol{m}_k = \frac{\boldsymbol{p}_{k+1} - \boldsymbol{p}_k}{2(x_{k+1} - x_k)} + \frac{\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1}}{2(x_k - x_{k-1})}$$

for internal points $k = 2,\ldots,n-1$, and one-sided difference at the endpoints of the data set.

Cardinal spline

A **cardinal spline** is obtained if

$$\boldsymbol{m}_k = (1-c)\frac{\boldsymbol{p}_{k+1} - \boldsymbol{p}_{k-1}}{2}$$

is used to calculate the tangents. The parameter ***c*** is a ***tension* parameter** that must be in the interval $(0,1)$. In some sense, this can be interpreted as the "length" of the tangent. $c = 1$ will yield all zero tangents, and $c = 0$ yields a Catmull-Rom interpolation spline.

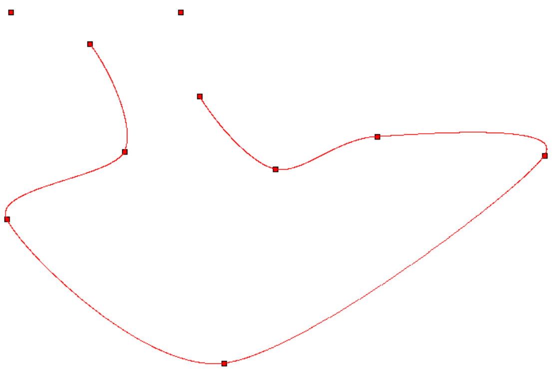
Catmull–Rom interpolation spline

For tangents chosen to be

$$\boldsymbol{m}_k = \frac{\boldsymbol{p}_{k+1} - \boldsymbol{p}_{k-1}}{2}$$

a **Catmull–Rom spline** is obtained, being a special case of a cardinal spline ($P_0=P_{-1}$, $P_n = P_{n+1}$):.

$$P(t) = (-t(1-t)^2 P_0 + (2-5t^2+3t^3)P_1 + t(1+4t-3t^2)P_2 - t^2(1-t)P_3)/2$$



Cardinal spline example in 2D

The line represents the curve, and the squares represent the control points p_k. Notice that the curve does not reach the first and last points, these points do however affect the shape of the curve. The tension parameter used is 0.1

Интерактивное конструирование кривых. Сплайны Безье (Bezier Curves)

Кривые или сплайны Безье были разработаны Полем де Кастельжо (Кастельо, Paul de Casteljau) и независимо от него Пьером Безье (Pierre Bezier) примерно в 1962 году. Эти кривые были включены в системы геометрического проектирования (CAGD) двух автомобильных компаний: "Рено" и "Ситроен".

Алгоритм де Кастельжо (геометрический)

Метод de Casteljau основан на разбиении отрезков, соединяющих исходные точки в отношении t (значение параметра), а затем в рекурсивном повторении этого процесса для полученных отрезков.

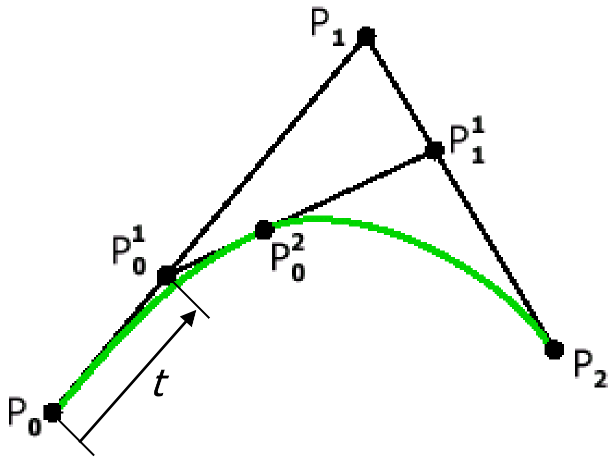
Обозначим опорные точки как P_i , i=0,1,m. Начало кривой положим в точке P_0 (t=0), а конец в точке P_m (t=1), для каждого t найдем точку P(t).

Случай m=1: $P(t)=(1-t)P_0+tP_1$

Случай m=2:

$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1 \quad P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2$$

$$P(t) = P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$



$$\boxed{P(t)=tween(tween(P0,P1,t), tween(P1,P2,t),t).}$$

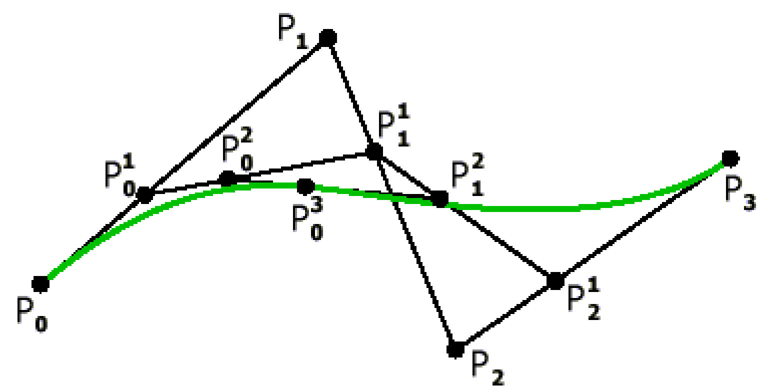
Кривые Безье (Bezier Curves)

Теперь постоим по алгоритму де Кастельжо кривую Безье с 4 опорными точками.

$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1 \quad P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2 \quad P_2^1 = (1-t)P_2 + tP_3$$

$$P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

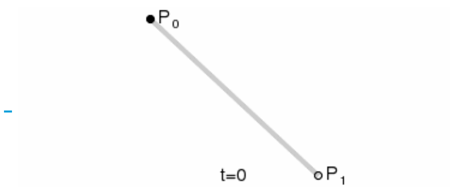
$$P_1^2 = (1-t)P_1^1 + tP_2^1 = (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3$$



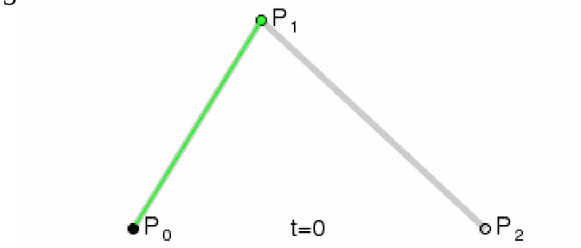
$$P_0^3(t) = (1-t)P_1^2 + tP_2^2 = (1-t)^2 P_0^1 + 2t(1-t)P_1^1 + t^2 P_2^1 =$$

$$(1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 tP_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \qquad (1)$$

Bezier Curves. Animated examples

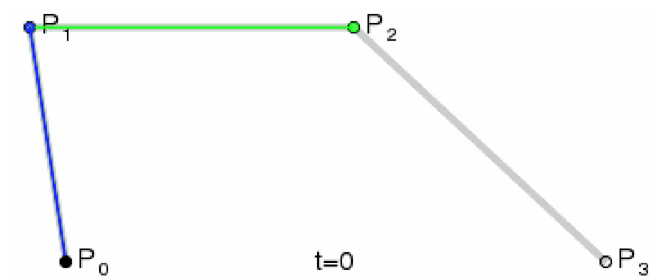


$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1 \quad P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2 \quad P_2^1 = (1-t)P_2 + tP_3$$



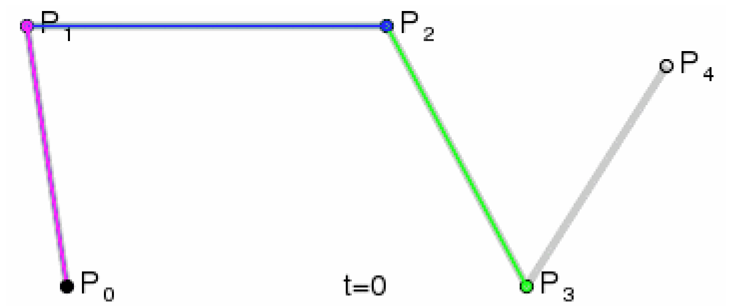
$$P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$P_1^2 = (1-t)P_1^1 + tP_2^1 = (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3$$



$$P_0^3(t) = (1-t)P_1^2 + tP_2^2 = (1-t)^2 P_0^1 + 2t(1-t)P_1^1 + t^2 P_2^1 =$$
$$(1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 tP_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

Можно продолжать подобные построения и для большего числа узлов, получая аналогичные выкладки.



Кривые Безье. Многочлены Бернштейна

Можно продолжать подобные построения и для большего числа узлов, получая аналогичные выкладки. Запишем общее аналитическое представление для кривой Безье с n+1 опорной точкой: $P^n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot B_i^n(t)$,

где $B_i^n(t) = C_i^n \cdot t^i (1-t)^{n-i} = \dfrac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \cdot t^i (1-t)^{n-i}$

$C_i^n = \dfrac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$ - биномиальные коэффициенты,

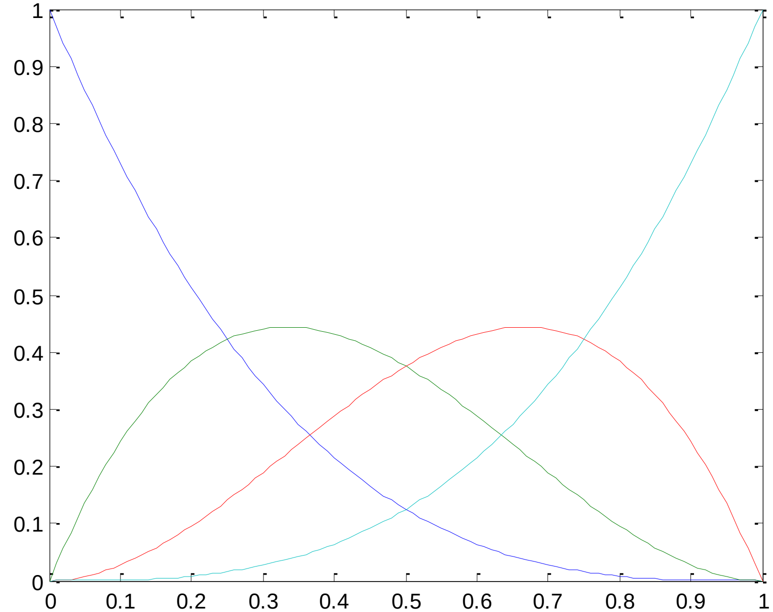
$B_i^n(t)$ называются базисными многочленами Бернштейна **n** степени

$$B_0^3(t) = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = 3(1-t)^2 t \qquad (2)$$

$$B_2^3(t) = 3(1-t)\ t^2$$

$$B_3^3(t) = t^3 \qquad \sum_{k=0}^{3} B_k^3(t) = 1$$



Свойства кривых Безье

Bezier curve C++ (MFC) Demo

Bezier curve. Lab C++ (Doc)

- 1) Инвариантность относительно аффинных преобразований;
- 2) Инвариантность относительно линейных замен параметризации; $t = \dfrac{u-a}{b-a}$
- 3)Кривая Безье принадлежит выпуклой оболочке опорных точек (следует из геометрического способа построения);
- Следствие: Если все опорные точки лежат на одной прямой, то кривая Безье вырождается в отрезок, соединяющий эти точки.
- 4) Кривая Безье проходит через P_0 и P_N
- 5) Симметричность: если рассматривать контрольные точки в противоположном порядке, то кривая не измениться;
- 6) Степень многочлена, представляющего кривую в аналитическом виде на 1 меньше числа опорных точек;
- 7) Векторы касательных в точках P_0 и P_N коллинеарны P_0P_1 и $\boldsymbol{P}_{N-1}\boldsymbol{P}_N$

соответственно

Rational parametrical Bezier spline forms

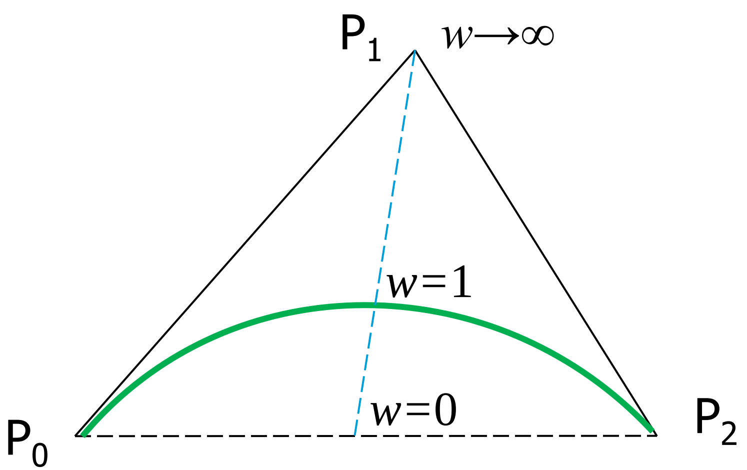
Rational parametrical spline forms

Each of coordinates is defined as the ratio of two polynomials:

$$P(t) = \frac{P_0(1-t)^2 + 2wP_1t(1-t) + P_2t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2} \qquad (3)$$

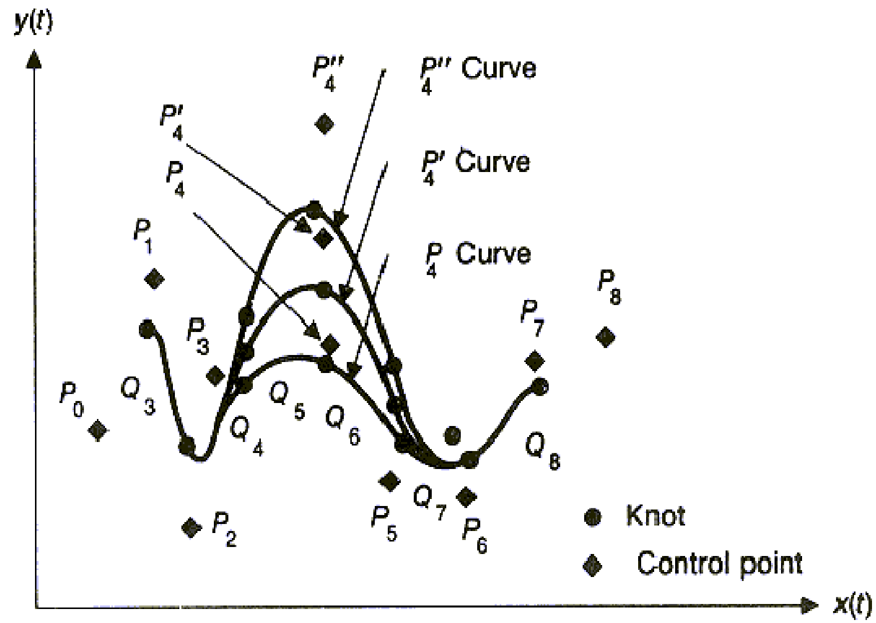
If w <1 – an ellipse, if w=1 – a parabola, if w> 1 – a hyperbola, limited by polyline $P_0P_1P_2$.

If w <0, we are getting additional part of a corresponding curve (with points P'), and points P‘(t) are collinear to the $P_1P(t)$.



B-сплайны и NURBS

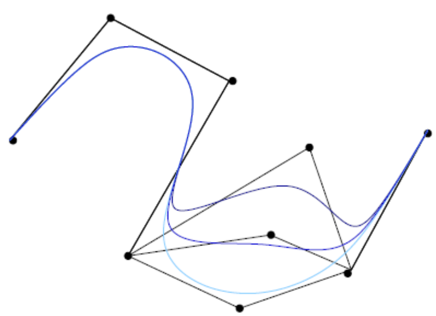
В общем случае B-сплайн состоит из нескольких сплайновых сегментов, каждый из которых определен как набор управляющих точек. Коэффициенты многочлена будут зависеть только от управляющих точек на рассматриваемом сегменте кривой. Этот эффект называется локальным управлением, поскольку перемещение управляющей точки будет влиять не на все сегменты кривой. Рисунок показывает, как управляющая точка P_4 локально влияет на форму кривой.



Если координаты (x, y, z) точки кривой представлены в виде рациональной дроби,

$$x = \frac{X(t)}{W(t)}, \quad y = \frac{Y(t)}{W(t)}, \quad z = \frac{Z(t)}{W(t)}$$

то говорят, что B-сплайн рациональный, иначе – нерациональный.



Существуют 4 типа B-сплайнов:
- равномерные нерациональные;
- неравномерные нерациональные;
- равномерные рациональные;
- неравномерные рациональные.

Последний, наиболее общий тип B-сплайнов, и называют NURBS.

B-сплайны и NURBS.
Математические выражения для кривой и поверхности

$$P(t)=\frac{\sum_{i=0}^{p}B_{i,n}(t)P_i w_i}{\sum_{i=0}^{p}B_{i,n}(t)w_i}$$ -кривая;

$$S(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)P_{i,j}w_{i,j}}{\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)w_{i,j}}$$ -поверхность,

где, базовая функция $B_{i,n}$ определена рекурсивно формулами Кокса-де Бура: (4)

$$B_{i,n}(t):\quad B_{i,0}(t)=\begin{cases}1, & t_i\le t<t_{i+1}\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}\qquad \forall k>0,\ B_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}B_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}B_{i+1,k-1}(t)$$

$w_{i,j}$ – вес, ассоциированный с управляющей точкой $P_{i,j}$, $1\le k\le n$, $n=p-1$ – степень полиномов, p – порядок B-сплайна и число сегментов поддержки, $p+1$ – число узлов поддержки, принято, что 0/0=0.

Точка кривой (поверхности) является средневзвешенным управляющих точек. Базовая функция $B_{i,n}$ определена рекурсивно.

Свойство: Сумма базисных функций $\sum_{i=0}^{p}B_{i,n}(t)=1$

B-сплайны. NURBS

Множество стыковочных функций $B_{i,n}$. Рекурсия Кокса-де Бура

$B_{i,n}(t)$ -стыковочные функции, определяющие число и степень влияния узлов поддержки;
i – номер первого узла поддержки,
n – степень полиномов, n+2 – число узлов.

$$B_{i,n}(t): \qquad B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \le t < t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

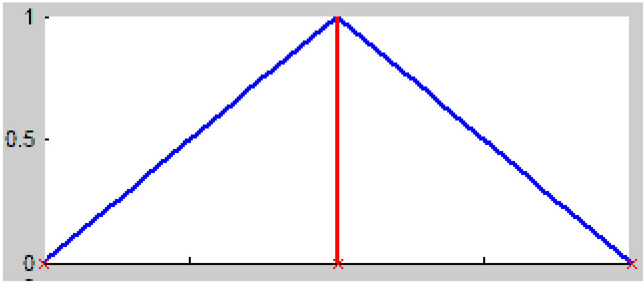
→ локальность

$$\forall k > 0, \; B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t)$$

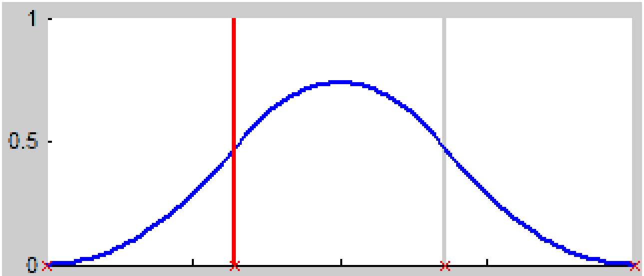
$1 \le k \le n$. **Свойство:** $$\sum_{i=0}^{p} B_{i,n}(t) = 1 \qquad (5)$$

NURBS имеет все преимущества Безье-сплайнов, а также следующие:

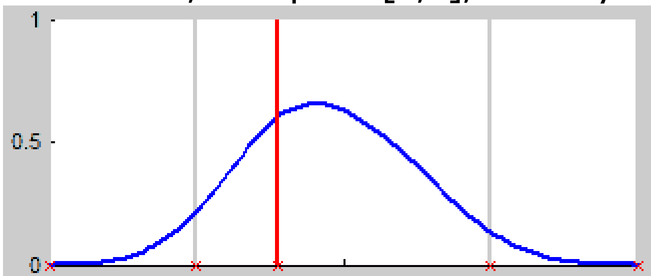
- при равенстве весов w_i единице (6) превращается в (1);
- инвариантность относительно проективных преобразований;
- возможность локального управления кривизной сплайна;
- наличие весов для управляющих точек: еще более гибкие.



степень=1, интервал [0,2], число узлов=3



степень=2 , интервал [0,3], число узлов=4



степень=3 , интервал [0,4], число узлов=5

B-сплайны. NURBS
Пример стыковочных функций

Пример

Стыковочная кусочная кривая g(t) второй степени 3 порядка - с поддержкой на интервале [0,3]:

$a(t)=t^2/2$, $0<t<1$;

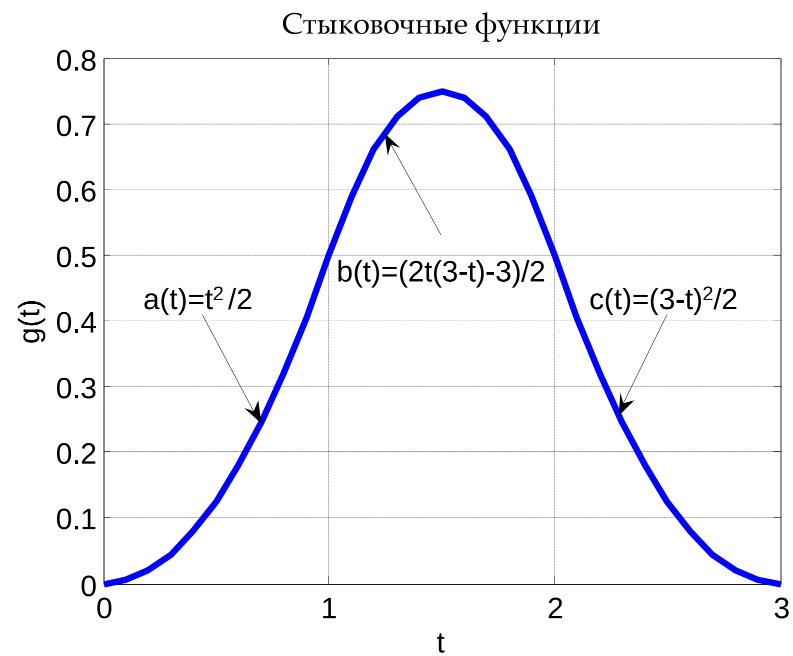
$b(t)=(2t(3-t)-3)/2$, $1<t<2$; (4)

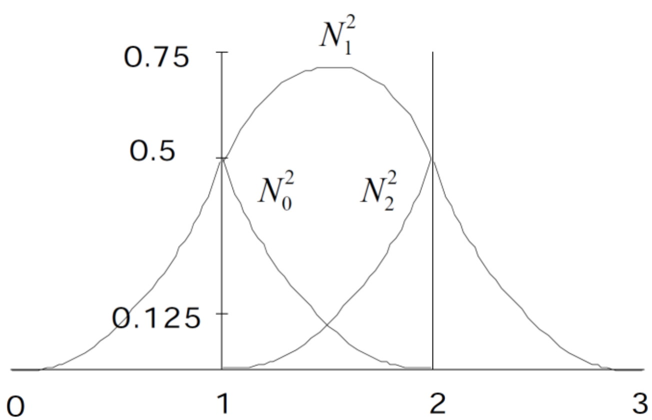
$c(t)=(3-t)^2/2$, $2<t<3$

Св-во: $a(t)+b(t)+c(t)=[t^2+2t(3-t)-3+(3-t)^2]/2=3$

➔ Нормировка →равномерный рациональный B-сплайн

Задача: обеспечить стыковку заданного порядка гладкости !!!

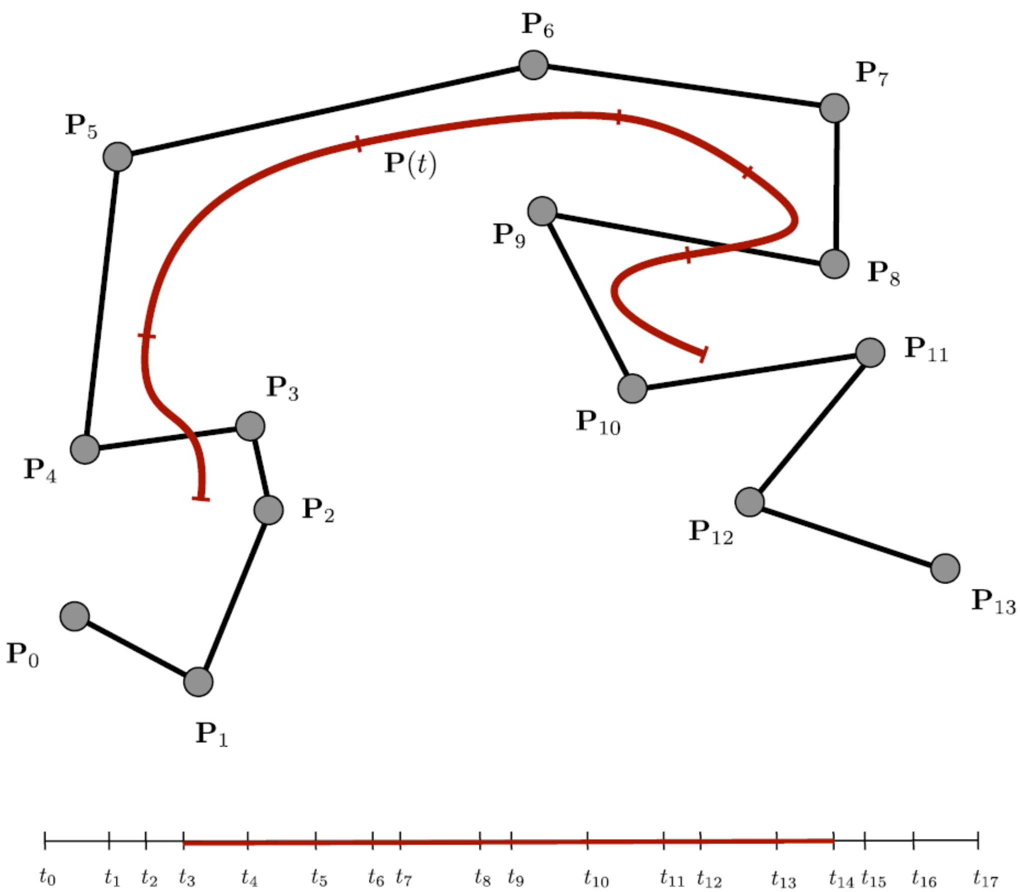




Точки де Бура

B-сплайны. Свойства

Свойство 1: В общем случае B-сплайн не проходит через конечные точки



$$P(t) = \sum_{i=0}^{p} B_{i,n}(t) P_i$$

$P(t)$ - аффинная комбинация точек.
В пределах (n+1) сегмента поддержки – выпуклая комбинация точек

Пример B-сплайна 4-й степени

B-сплайны.
Сетки узлов и форма B-сплайнов

- degree n
- knot vector $t_0 < t_1 < \cdots < t_{m+n}$
- control points $\mathbf{d}_0, \ldots, \mathbf{d}_{m-1} \in \mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$.

Let $F(u) = \sum_{i=0}^{m-1} N_i^n(u)\, \mathbf{d}_i$ a B-spline curve of degree n over the knot vector T. Then the following properties hold true:

(1) In general there is *no* endpoint interpolation.

(2) For $t_i \leq u < t_{i+1}$, $F(u)$ lies in the convex hull of the $n+1$ control points $\mathbf{d}_{i-n}, \ldots, \mathbf{d}_i$ ("local convex hull").

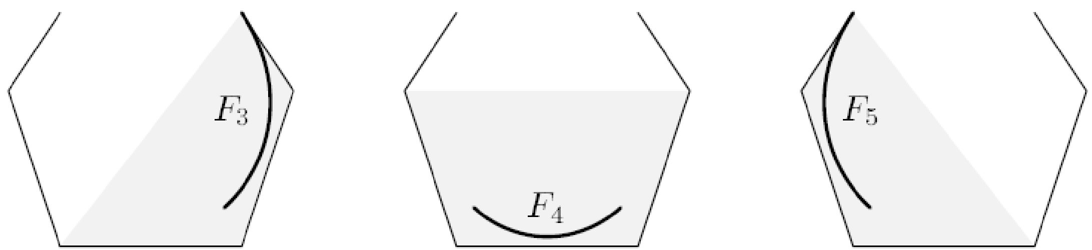


Figure 1 : Local convex hull

(3) Local control: For $u \in [t_i, t_{i+1})$ the curve is independent of $\mathbf{d}_j$ for $j < i - n$ and $j > i$.

(4) If n control points coincide, then the curve goes through this point and is tangent to the control polygon (Fig. 2).

B-сплайны и NURBS.
Сетки узлов и свойства B-сплайнов

(4) If n control points coincide, then the curve goes through this point and is tangent to the control polygon (Fig. 2).

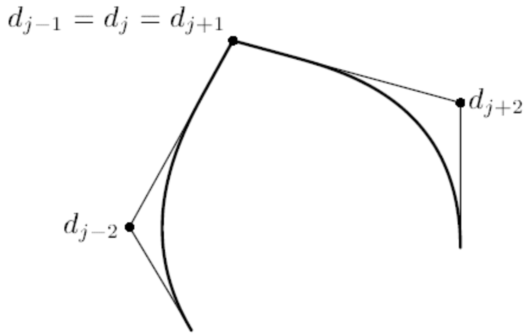


Figure 2 : $n = 3$ control points coincide

(5) If n control points are on a line, then the curve touches this line (Fig. 3).

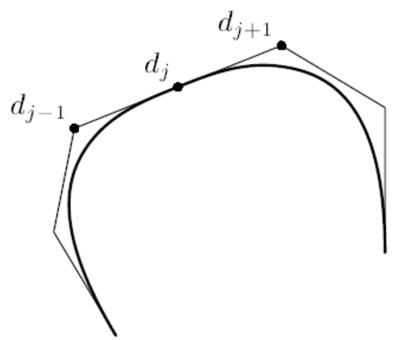


Figure 3 : $n = 3$ control points on a line

B-сплайны и NURBS.
Сетки узлов и свойства B-сплайнов

(6) If $n+1$ control points are on a line L, then $F(u) \in L$ for $t_i \leq u < t_{i+1}$, i. e. a whole segment of the curve $F(u)$ coincides with L (Fig. **4**).

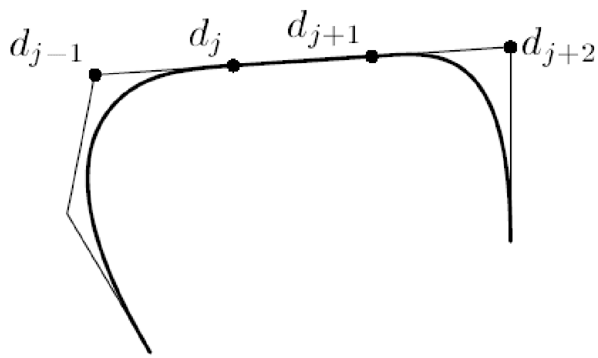


Figure **4** : $n+1=4$ control points on a line

(7) Derivative:

$$F'(u) = \sum_{i=0}^{m-2} N_{i+1}^{n-1}(u)\,\mathbf{d}_i^* \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_i^* = \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} (\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i) \qquad \textbf{(5)}$$

B-сплайны и NURBS.
Сетки узлов

Вектор узлов определяет интервалы пространства параметров, на которых определены базисные функции. Если шаг между узлами постоянен, то они называются равномерными (**uniform)** иначе **non-uniform.** Если мы примем, что (0/0) := 0 в определении базисных функций, то будет разрешена кратность узлов. Такие узлы названы повторяющимися (**repeated).** Если первый и последний узлы **repeated n + 1 times**, то вектор называется **open.** Figure 1 показывает базисы степени 1 and 2 на равномерном векторе узлов. Для таких узлов базисные функции $N^n_i(t)$ одинаковы с точностью до параллельного переноса.

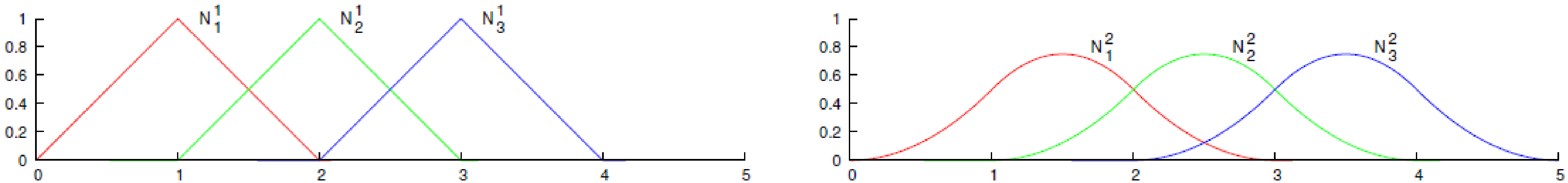


Figure 1: Basis functions of degree 1 and 2 on uniform knot vector

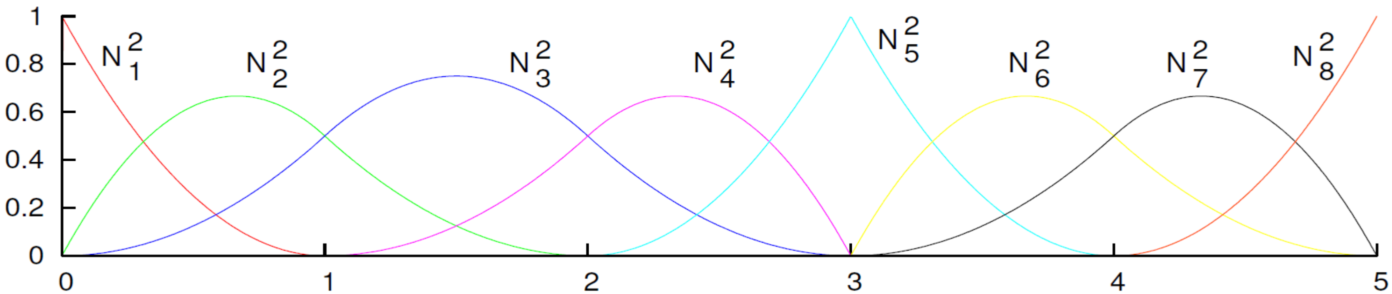


Figure 2: Basis functions of degree 2 on non-uniform knot vector

В общем случае базисные функции степени **n** имеют **n-1** непрер. производную, например, квадратичные ф-и везде $\mathbf{C^1}$ непрерывны. Эта непрерывность может быть понижена повторением узлов в векторе узлов. Базисные функции становятся интерполяционными если кратность внутреннего узла достигла **n** (см. Figure 2, где мы используем неоднородный открытый вектор узлов). А т.к. кратность узлов на концах равна **n+1** функции становятся интерполяционными на концах.

B-сплайны и NURBS.
Сетки узлов

Возможные сетки узлов:

1)Равномерные: [0 1 2 3 4] – ненормированная, [0 0.25 0.5 0.75 1] – нормированная. Равномерные последовательности узлов порождают периодические равномерные функции базиса, для которых

$$B_{i,n}(t) = B_{i-1,n}(t-1) = B_{i+1,n}(t+1)$$

2)Открытые равномерные:

У открытого равномерного вектора узлов, число одинаковых узлов на концах равно порядку B-сплайна:

p=2	[0 0 1 2 3 4 4],	[0 0 1/4 1/2 3/4 1 1]
p=3	[0 0 0 1 2 3 3 3],	[0 0 0 1/3 2/3 1 1 1]
p=4	[0 0 0 0 1 2 2 2 2],	[0 0 0 0 1/2 1 1 1 1] ,

3)Неравномерные

Неоднородный рациональный B-сплайн (NURBS) 3 степени на открытом интервале [0,1]:

$$P(t) = \frac{w_0 P_0 (1-t)^3 + 3w_1 P_1 t(1-t)^2 + 3w_2 P_2 t^2 (1-t) \;\; + w_3 P_3 t^3}{w_0 (1-t)^3 + 3w_1 t(1-t)^2 + 3w_2 t^2 (1-t) \;\; + w_3 t^3} \qquad (6)$$

- рациональный сплайн Безье – это частный случай NURBS на открытом нормированном векторе узлов.

Источники

1. An Interactive Introduction to Splines: Bezier, B-spline, NURBS, and many other spline curves and surfaces with interactive 2D Java applets and VRML (The Public's Library and Digital Archive IBIBLIO) www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm
2. Spline / Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics)
3. Tricubic (&Bicubic) interpolation / Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Tricubic_interpolation
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. - М.: Мир, 2001. - 604с.
5. Хилл Ф. OpenGL. Программирование компьютерной графики. – С.Пб: Питер, 2002. 1088с.
6. Шикин Е.В., Боресков А.В. Компьютерная графика. Полигональные модели. –М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2001.-464с.
7. Порев В.Н. Компьютерная графика. –СПб.: БХВ-Петербург, 2002. –432с.
8. Поляков А.Ю., Брусенцев В.А. Программирование графики: GDI+ и DirectX. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. -368с.
9. Алексей Игнатенко. Геометрическое моделирование сплошных тел //Компьютерная графика и мультимедиа. Вып. №1(1), 2003. http://cgm.computergraphics.ru/content/view/19